Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Taisi Telve

Liikmetega $(-1)^n\dfrac{|\sin n|}{n}$ rea koonduvus

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Indrek Zolk

Tartu 2016

Liikmetega $(-1)^n \dfrac{|\sin n|}{n}$ rea koonduvus

Bakalaureusetöö
Taisi Telve

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös esitatakse rea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin n\pi\alpha|$, kus α on irratsionaalarv ja $f\colon[1,\infty)\to(0,\infty)$ on pidev ja kahanev, koonduvuseks piisava tingimuse üksikasjalik tõestus ning järeldusena koonduvus erijuhul, kus $\alpha = 1/\pi$ ja $f(n) = 1/n$. Lisaks on esitatud mainitud rea koonduvuseks tarvilik ja piisav tingimus juhul, kui α on ratsionaalarv. Töös esitatud tõestus toetub A. V. Kumchevi artiklis *On the convergence of some alternating series* (The Ramanujan Journal, 2013) esitatule.
CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs
Märksõnad. Vahelduvate märkidega read, osasummad, ahelmurrud, lähismurrud, irratsionaalsusmõõt.

Convergence of the series with terms $(-1)^n \dfrac{|\sin n|}{n}$

Bachelor's thesis
Taisi Telve

Abstract. The objective of this bachelor's thesis is to present a detailed proof of the sufficient condition for the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin n\pi\alpha|$, where α is irrational and $f\colon[1,\infty)\to(0,\infty)$ is continuous and decreasing, and a proof of the convergence in the special case where $\alpha = 1/\pi$ and $f(n) = 1/n$. In addition we give the proof of the necessary and sufficient condition for the aforementioned series, where α is rational. The exposition is based on the proof presented in the article *On the convergence of some alternating series* (The Ramanujan Journal, 2013) by A. V. Kumchev.
CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis
Key words. Alternating series, partial sums, continued fractions, convergents, irrationality measure.

Sisukord

Sissejuhatus

Matemaatilise analüüsi kursusest on tuntud sellised read, nagu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

millest esimene koondub Leibnizi tunnuse põhjal, teine hajub, sest liites ja lahutades lugejas $|\sin(n-1)|$ ning korrutades lugeja ja nimetaja kahega, saab rea eraldada kaheks osaks, millest üks osa koondub ja teine hajub, ning kolmas mainitud ridadest koondub, sest on funktsiooni $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$ Fourier' rea summa.
Kursuste käsitlusest jääb aga välja nimetatud ridu kombineerides saadav rida kujul

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\sin n|}{n}, \tag{1}$$

kuna selle koonduvuse uurimiseks ei piisa Fourier' analüüsist, Leibnizi vahelduvate märkidega rea koonduvustunnusest ega Abeli või Dirichlet' koonduvustunnustest.

Tähistagu $\mathfrak{F}$ selliste pidevate kahanevate funktsioonide $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ hulka, mille korral

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \qquad \int_1^{\infty} f(x) dx = \infty.$$

Kui $f \in \mathfrak{F}$, siis f on positiivne funktsioon ja rida $\sum_n (-1)^n f(n)$ koondub tingimisi.
Selles töös on põhilisel kohal read kujul

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) |\sin(n\pi\alpha)|, \tag{2}$$

kus α on reaalarv ja $f \in \mathfrak{F}$.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on tõestada rea (1) koonduvus. Selleks tõestame põhitulemusena ridade kujul (2), kus α on irratsionaalarv, koonduvuseks piisava tingimuse ning järeldame erijuhul $\alpha = \dfrac{1}{\pi}$ ja $f(n) = \dfrac{1}{n}$ rea (1) koonduvuse.

Lisaks tõestame tarviliku ja piisava tingimuse ridade (2) koonduvuseks juhul, kui α on ratsionaalarv.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis tutvustatakse töös kasutatavaid tähistusi ning tuletatakse meelde vajaminevaid väiteid matemaatilisest analüüsist ridade ja nende koonduvuse kohta ning arvuteooriast kongruentsuse kohta, mida kasutatakse ridade ümberjärjestamiseks. Samuti tutvustatakse irratsionaalsusmõõdu mõistet ning ahelmurde, lähismurde ja nende omadusi. Põhjalikum ülevaade ahelmurdudest ning nende lähismurdudest on leitav Khinchini raamatust *Continued Fractions* (1997) [4].

Teine peatükk on pühendatud ridade (2) koonduvuse uurimisele, kui α on ratsionaalarv. Selgub, et koonduvus sõltub ratsionaalarvu nimetaja paarsusest.

Kolmandas peatükis esitatakse bakalaureusetöö põhitulemus, mille tõestuse idee on järeldada uuritava rea koonduvus Cauchy kriteeriumist, kasutades osasummade hindamiseks funktsiooni f omadusi ja irratsionaalarvu α ahelmurru lähismurdude nimetajate omadusi. Põhitulemus on omakorda jaotatud osadeks, alustades osasumma teisendamisest, jätkates osasummade hindamisega kolmes osas sõltuvalt arvu α lähismurdude nimetajate suurusest ja paarsusest ning lõpetades leitud hinnangute rakendamise ning Cauchy kriteeriumi kehtivuse näitamisega.

Töö viimases peatükis järeldatakse põhitulemusest rea (1) koonduvus, milleks kasutame arvu $\dfrac{1}{\pi}$ lähismurdude omadusi ning arvu π irratsionaalsusmõõtu, millele andis esmakordselt hinnangu Mahler aastal 1953 [6].

Kõnealuses töös kasutatakse mitmeid üldtunnustatud tähistusi: kõigi reaalarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{R}$, naturaalarvude hulka sümboliga $\mathbb{N}$, täisarvude hulka sümboliga $\mathbb{Z}$, ratsionaalarvude hulka sümboliga $\mathbb{Q}$ ning kõigi kompleksarvude hulka sümboliga $\mathbb{C}$. Rea $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ summaks nimetame piirväärtust $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} u_n$.

Käesolev bakalaureusetöö on referatiivne ning põhineb Angel V. Kumchevi artiklil [5]. Lisaks on kasutatud raamatuid [2]–[4] ja [7].

1. Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis tutvustame töös kasutatud tähistusi ning tuletame meelde mõningad matemaatilise analüüsi kursustest tuntud tulemused ridade ning nende koonduvuse kohta. Lisaks vajame ridade teisendamiseks kongruentsi mõistet ning kompleksarve, milleks defineerime ka eraldi funktsiooni, mis võimaldab asju lühemalt kirja panna.

Defineerime funktsiooni $e:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nii, et $e(\alpha) = \cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha)$ iga $\alpha \in \mathbb{R}$ korral.

Lause 1.1. *Kui* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *siis*

$$e(\alpha + \beta) = e(\alpha)e(\beta).$$

Tõestus. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siis kasutades kahe nurga summa siinuse ja koosinuse valemeid, saame

$$\begin{aligned} e(\alpha+\beta) &= \cos(2\pi(\alpha+\beta)) + i\sin(2\pi(\alpha+\beta)) \\ &= \cos(2\pi\alpha)\cos(2\pi\beta) - \sin(2\pi\alpha)\sin(2\pi\beta) + i\sin(2\pi\alpha)\cos(2\pi\beta) + i\cos(2\pi\alpha)\sin(2\pi\beta) \\ &= \cos(2\pi\alpha)(\cos(2\pi\beta) + i\sin(2\pi\beta)) + i\sin(2\pi\alpha)(\cos(2\pi\beta) + i\sin(2\pi\beta)) \\ &= (\cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha))e(\beta) = e(\alpha)e(\beta). \end{aligned}$$

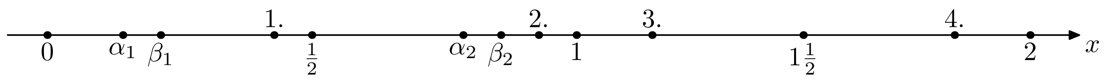
□

Tähistagu $\|x\|$ reaalarvu x kaugust lähima täisarvuni. Tegemist ei ole normiga, kuid saab näidata, et kehtib kolmnurga võrratus.

Lemma 1.2. *Olgu* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Siis*

$$\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|. \tag{1.1}$$

Tõestus. Kuna $\|x+n\| = \|x\|$ iga $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ korral, siis lihtsuse mõttes tõestame tingimuse juhul, kui $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. Olgu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sellised, et $\|\alpha_1\| = \alpha_1, \|\beta_1\| = \beta_1, \|\alpha_2\| = 1 - \alpha_2, \|\beta_2\| = 1 - \beta_2$ (vt. joonis 1.1).



Joonis 1.1: Vaadeldavad punktid ja erinevad juhud.

Kuna $0 \leqslant \|\alpha + \beta\| \leqslant \dfrac{1}{2}$ iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral, siis vaatleme ainult juhtusid, kus $\|\alpha\| + \|\beta\| < \dfrac{1}{2}$.

1. Kui $0 \leqslant \alpha_1 + \beta_1 < \dfrac{1}{2}$, siis

$$\|\alpha_1 + \beta_1\| = \alpha_1 + \beta_1 = \|\alpha_1\| + \|\beta_1\|.$$

2. Kui $\dfrac{1}{2} < \alpha_1 + \beta_2 \leqslant 1$, siis

$$\|\alpha_1 + \beta_2\| = 1 - (\alpha_1 + \beta_2) = -\alpha_1 + (1 - \beta_2) < \|\alpha_1\| + \|\beta_2\|.$$

3. Kui $1 < \alpha_1 + \beta_2 < 1\dfrac{1}{2}$, siis

$$\|\alpha_1 + \beta_2\| = \alpha_1 + \beta_2 - 1 = \alpha_1 - (1 - \beta_2) < \|\alpha_1\| + \|\beta_2\|.$$

4. Kui $1\dfrac{1}{2} < \alpha_2 + \beta_2 \leqslant 2$, siis

$$\|\alpha_2 + \beta_2\| = 2 - (\alpha_2 + \beta_2) = \|\alpha_2\| + \|\beta_2\|.$$

Järelikult võrratus (1.1) kehtib. $\square$

Definitsioon 1.3. Olgu $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Öeldakse, et a ja b on *kongruentsed* mooduli n järgi (ja kirjutatakse $a \equiv b \pmod{n}$), kui $n \mid b - a$, s.t. kui leidub selline $k \in \mathbb{Z}$, et $b = a + kn$ ehk $a = b + (-k)n$.

Definitsioon 1.4. *Transtsendentseks* nimetatakse reaal- või kompleksarvu, mis ei ole algebraline, s.t. mis ei ole nullist erineva ratsionaalsete kordajatega polünoomi juur.

Järgnevad definitsioonid ja tulemused ning põhjalikum ülevaade ahelmurdude ning nende lähismurdude kohta on leitavad Khinchini raamatust [4].

Definitsioon 1.5. Avaldist

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{1.2}$$

kus a_0 on täisarv ja $a_1, a_2, \dots$ on positiivsed täisarvud, nimetatakse *harilikuks ahelmurruks.*

Iga reaalarvu saab esitada ahelmurruna, kusjuures iga ratsionaalarv avaldub lõpliku ahelmurruna ning iga irratsionaalarv lõpmatu ahelmurruna.

Definitsioon 1.6. Defineerime jadad (p_n) ja (q_n) võrdustega:

$$p_{-1} := 1, \quad q_{-1} := 0, \quad p_0 := a_0, \quad q_0 := 1,$$

$$p_{n+1} := a_n p_n + p_{n-1},$$

$$q_{n+1} := a_n q_n + q_{n-1}$$

$n \geqslant 1$. Siis murde $\frac{p_n}{q_n}(n \in \mathbb{N})$ nimetatakse ahelmurru (1.2) *lähismurdudeks* ehk *aproksimantideks.*

Lemma 1.7. *Olgu $(p_n/q_n)_{n=1}^{\infty}$ arvu α lähismurdude jada. Siis $n \geqslant 1$ korral kehtivad omadused*

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} \quad ja \quad q_n \geqslant 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Bakalaureusetöö viimases peatükis on kasutatud ka irratsionaalsusmõõdu mõistet, mis on leitav Alekseyevi artiklist [1].

Definitsioon 1.8. Olgu x reaalarv ja olgu R positiivsete reaalarvude μ hulk, mille korral võrratusel

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}}$$

on ülimalt lõplik arv lahendeid p/q, kus $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ ja $\text{SÜT}(p,q) = 1$. *Irratsionaalsusmõõt*, mida mõnikord nimetatakse Liouville-Roth konstandiks, on defineeritud võrdusega

$$\mu(x) = \inf_{\mu \in R} \mu.$$

Teisisõnu, irratsionaalsusmõõt näitab, kui hästi on võimalik reaalarvu x lähendada ratsionaalarvudega.

Märkus 1.9. Kui hulk R on tühi, siis defineeritakse $\mu(x) = \infty$ ja reaalarvu x nimetatakse Liouville'i arvuks. Mittetühja R korral on kolm võimalust:

$$\begin{cases} \mu(x) = 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ \mu(x) = 2, & \text{kui } x \text{ on algebraline arv, mis ei ole ratsionaalarv,} \\ \mu(x) \geqslant 2, & \text{kui } x \text{ on transtsendentne.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Järgmised väited pärinevad Kangro matemaatilise analüüsi õpikutest [2] ja [3].

Definitsioon 1.10. Funktsionaalrida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

kus kordajad $a_0, a_k, b_k (k \in \mathbb{N})$ on määratud seostega

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

nimetatakse funktsiooni f *Fourier' reaks* lõigus $[-\pi, \pi]$.

Teoreem 1.11. *Kui absoluutselt integreeruv funktsioon $f(x)$ on perioodiline perioodiga 2π, siis igas punktis x, kus on olemas ühepoolsed tuletised*

$$f'(x+) = \lim_{u \to 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \quad \text{ja} \quad f'(x-) = \lim_{u \to 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

koondub funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida summaks

$$S = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Lause 1.12 (Cauchy kriteerium ridade jaoks). *Arvrida $\sum_k u_k$ koondub parajasti siis, kui*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m > n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon.$$

Lemma 1.13 (Leibnizi vahelduvate märkidega rea jääkliikme hinnang). *Kui $0 \leqslant u_k \downarrow 0$, siis*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|.$$

Lemma 1.14 (**Abeli teisendus**). *Suvaliste arvude* $u_1, \ldots, u_n$ *ja* $v_1, \ldots, v_n$ *korral kehtib võrdus*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) s_k + v_n s_n,$$

kus $s_k := u_1 + \ldots + u_k \quad (k = 1, \ldots, n)$.

Lause 1.15 (**d'Alemberti tunnus**). *Rida* $\sum_k u_k$ *koondub absoluutselt, kui eksisteerib piirväärtus* $d := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ *ning* $d < 1$. *Kui* $d > 1$, *siis rida* $\sum_k u_k$ *hajub.*

Lause 1.16 (**Ridade võrdluslause**). *Leidugu ridade* $\sum_k u_k$ *ja* $\sum_k v_k$ *puhul selline* $K \in \mathbb{N}$, *et* $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ *iga* $k > K$ *korral.*

1. *Kui rida* $\sum_k v_k$ *koondub, siis koondub ka rida* $\sum_k u_k$.

2. *Kui rida* $\sum_k u_k$ *hajub, siis hajub ka rida* $\sum_k v_k$.

2. Koonduvus juhul, kui α on ratsionaalarv

Selles peatükis tõestame ridade $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|$, kus α on ratsionaalarv ja $f \in \mathfrak{F}$, koonduvuseks tarviliku ja piisava tingimuse. Eelnevalt tõestame mõned tulemust toetavad laused ja lemmad.

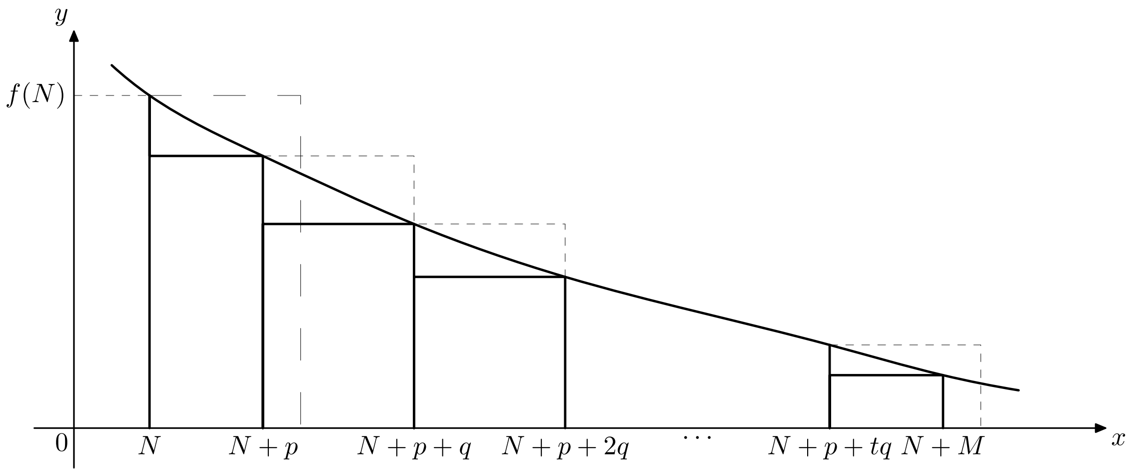
Lause 2.1. *Olgu* $q, N, M \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant h \leqslant q$, $f \in \mathfrak{F}$. *Siis*

$$\Big|\sum_{\substack{n=N+1\\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} qf(n) - \int_N^{N+M} f(x)dx\Big| \leqslant 3qf(N). \tag{2.1}$$

Tõestus. Olgu $h \in \{1,\dots,q\}$ suvaline. Olgu $p \in \{1,2,\dots,q\}$ selline, et $N+p = \min_{1\leqslant i\leqslant M}\{N+i \mid N+i \equiv h \pmod q\}$ ning olgu $t \in \mathbb{N}$ selline, et $N+p+tq = \max_{1\leqslant i\leqslant M}\{N+i \mid N+i \equiv h \pmod q\}$. Paneme tähele, et kui $N+1 \leqslant k < l \leqslant N+M$, siis

$$\sum_{\substack{n=k\\ n\equiv h \pmod q}}^{l} qf(n) - \int_k^l f(x)dx \leqslant qf(N).$$

Hindame antud vahe absoluutväärtust kolmes osas, kasutades f monotoonsust ning kolmnurga võrratust (vt. joonist 2.1).



Joonis 2.1: Funktsiooni f graafik ja vaadeldav summa.

Saame

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{\substack{n=N+1\\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} qf(n) - \int_N^{N+M} f(x)dx\right| \\
&= \left|qf(N+p) + qf(N+p+q) + \ldots + qf(N+p+tq) - \int_N^{N+M} f(x)dx\right| \\
&= \left|qf(N+p) + \ldots + (N+M-(N+p+tq))f(N+p+tq) - \int_{N+p}^{N+M} f(x)dx\right. \\
&\quad \left. + (N+p+(t+1)q-(N+M))f(N+p+tq) - \int_N^{N+p} f(x)dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_N^{N+p} f(x)dx\right| + \left|q(f(N+p)+\ldots+f(N+p+tq)) - \int_{N+p}^{N+M} f(x)dx\right| \\
&\quad + \left|(p+(t+1)q-M)f(N+p+tq)\right| \leqslant qf(N) + qf(N) + qf(N) = 3qf(N).
\end{aligned}
$$

Seega tingimus (2.1) kehtib.

□

Märkus 2.2. Eelnevas lauses on võimalik tuletada $qf(N)$ ees olevale konstandile väiksem väärtus (näiteks 2, arvestades, et tekkivate ristkülikute summa ning integraali vahe on väiksem kui $qf(N)$), mis annab absoluutväärtusele parema hinnangu, kuid on siinkohal ebavajalik.

Lemma 2.3. *Olgu* $n, h, q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ *ja* $n \equiv h \pmod{q}$. *Siis*

$$\left|\sin\frac{\pi pn}{q}\right| = \left|\sin\frac{\pi ph}{q}\right|.$$

Tõestus. Kuna $n \equiv h \pmod{q}$, siis leidub $t \in \mathbb{Z}$ nii, et $n = qt + h$ (vt. definitsioon 1.3). Asendades saame

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{\pi pn}{q}\right| &= \left|\sin\frac{(qt+h)\pi p}{q}\right| = \left|\sin(\pi pt)\cos\frac{\pi hp}{q} + \cos(\pi pt)\sin\frac{\pi ph}{q}\right| \\ &= \left|0 + \sin\frac{\pi ph}{q}\cdot 1\right| = \left|\sin\frac{\pi ph}{q}\right|.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4. *Olgu* $q \in \mathbb{N}$. *Siis*

$$\sum_{h=1}^{q}\sin(hx) = \frac{\sin\frac{(q+1)x}{2}\sin\frac{qx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Tõestus. Tähistame $S_q := \sum_{h=1}^{q}\sin(hx)$. Korrutades võrduse mõlemad pooled $\sin\frac{x}{2}$ läbi, saame

$$S_q\sin\frac{x}{2} = \sin x\sin\frac{x}{2} + \sin 2x\sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin qx\sin\frac{x}{2}.$$

Kasutades valemit $\sin(mx)\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos((m-\frac{1}{2})x) - \cos((m+\frac{1}{2})x))$, saame teleskoopsumma

$$S_q\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} - \cos((q+\frac{1}{2})x)) = \sin\frac{qx}{2}\sin\frac{(q+1)x}{2},$$

kust järeldub soovitud valem. □

Teoreem 2.5. *Olgu* $f \in \mathfrak{F}$ *ja* $\alpha = \frac{p}{q}$ *selline, et* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *ja* $\text{SÜT}(p,q) = 1$. *Siis rida* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|$ *koondub parajasti siis, kui* q *on paaritu.*

Tõestus. Cauchy kriteeriumi kohaselt rida $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|$ koondub parajasti siis, kui

$$\forall\varepsilon > 0\exists N_0 \in \mathbb{N} : M > N \geqslant N_0 \Rightarrow \left|\sum_{n=N+1}^{M+N}(-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|\right| < \varepsilon.$$

Vaatleme summat

$$S(\alpha; M, N) := \sum_{n=N+1}^{N+M} (-1)^n f(n) \left|\sin \frac{n\pi p}{q}\right|,$$

kus $M, N \in \mathbb{N}$. Järjestades rea n jäägiklasside mooduli q järgi ümber, saame

$$\begin{aligned} S(\alpha; M, N) &= \sum_{h=1}^{q} \sum_{\substack{n=N+1 \\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} (-1)^n f(n) \left|\sin \frac{n\pi p}{q}\right| \\ &= \sum_{h=1}^{q} \left|\sin \frac{\pi h p}{q}\right| \sum_{\substack{n=N+1 \\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} (-1)^n f(n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

kus viimane võrdus kehtib lemma 2.3 põhjal.
Esiteks, olgu q paaritu. Siis summa üle n võrduses (2.2) on vahelduvate märkidega, seega Leibnizi vahelduvate märkidega rea jääkliikme hinnangu (vt. lemma 1.13) põhjal tõkestatud oma esimese liikmega, mis on maksimaalselt $f(N)$. Teame ka, et $\left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| \leqslant 1$, seega

$$\left|S(\alpha; M, N)\right| \leqslant \sum_{h=1}^{q} 1 \cdot f(N) = q f(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

mis on väiksem igast reaalarvust $\varepsilon > 0$, mis tähendab, et rida koondub.
Teiseks, olgu q paaris. Kuna $\text{SÜT}(p, q) = 1$, siis on p paaritu ja $n \equiv h \pmod q$ tõttu $(-1)^n = (-1)^{qt+h} = (-1)^{qt}(-1)^h = (-1)^h = (-1)^{ph}$, kus $t \in \mathbb{Z}$. Seega

$$S(\alpha; M, N) = \sum_{h=1}^{q} (-1)^{ph} \left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| \sum_{\substack{n=N+1 \\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} f(n).$$

Lause 2.1 põhjal

$$\begin{aligned} S(\alpha; M, N) &= \sum_{h=1}^{q} (-1)^{ph} \left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| \frac{1}{q} \Big(\sum_{\substack{n=N+1 \\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} q f(n) - I_f + I_f \Big) \\ &\leqslant \sum_{h=1}^{q} (-1)^{ph} \left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| \frac{I_f}{q} + \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{q} \left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| \sum_{\substack{n=N+1 \\ n\equiv h \pmod q}}^{N+M} \left|q f(n) - I_f\right| \\ &= \frac{I_f}{q} \sum_{h=1}^{q} (-1)^{ph} \left|\sin \frac{\pi p h}{q}\right| + 3 q f(N), \end{aligned} \tag{2.3}$$

kus $I_f = I_f(M, N) = \int_N^{N+M} f(x) dx$.
Kuna $\text{SÜT}(p, q) = 1$, siis hulgad $\{p, 2p, \dots, qp\}$ ja $\{1, 2, \dots, q\}$ on mooduli q järgi

võrdsed. Seega

$$\sum_{h=1}^{q}(-1)^{ph}\Big|\sin\frac{\pi ph}{q}\Big| = \sum_{h=1}^{q}(-1)^{h}\sin\frac{\pi h}{q} = \sum_{h=1}^{q}\cos(\pi h)\sin\frac{\pi h}{q} = \sum_{h=1}^{q}\sin\pi h\Big(1+\frac{1}{q}\Big).$$

Hindame viimast summat, kasutades valemit (tuletatud lemmas 2.4)

$$\sum_{h=1}^{q}\sin(hx) = \frac{\sin\frac{(q+1)x}{2}\sin\frac{qx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

saame lihtsustades

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{q}(-1)^{ph}\Big|\sin\frac{\pi ph}{q}\Big| &= \frac{\sin\left((q+1)\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{q})\right)\sin\left(\frac{\pi q}{2}(1+\frac{1}{q})\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{q})\right)}\\ &= \frac{\sin\frac{\pi}{2q}\cos\left(\frac{\pi q}{2}+\pi\right)\cos\frac{\pi q}{2}}{\cos\frac{\pi}{2q}} = -\tan\frac{\pi}{2q}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Asendades (2.4) võrduse (2.3) paremasse poolde, saame

$$S(\alpha;M,N) \leqslant -\frac{1}{q}\tan\frac{\pi}{2q}I_f(M,N) + 3qf(N),$$

Kuna $\int_N^\infty f(x)dx = \infty$, siis ka rida hajub. □

3. Koonduvus juhul, kui α on irratsionaalarv

Selles peatükis anname piisava tingimuse rea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|$ koonduvuseks, kus α on irratsionaalarv ja $f \in \mathfrak{F}$. Alustame mõne põhitulemust toetava lemma tõestusega.

Lemma 3.1. *Iga $x \in \mathbb{R}$ korral*

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1}.$$

Tõestus. Arendame funktsiooni $f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$ Fourier' reaks (vt. definitsioon 1.10). Kuna $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ on paarisfunktsioon, siis $b_k = 0$ iga $k = 1, 2, \ldots$ korral. Leiame kordajad a_k, $k = 0, 1, 2\ldots$, saame

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx = \frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin\Big(x\Big(\frac{1}{2}+k\Big)\Big) + \sin\Big(x\Big(\frac{1}{2}-k\Big)\Big)\Big)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{1+2k}\cos\Big(x\Big(\frac{1}{2}+k\Big)\Big) + \frac{1}{1-2k}\cos\Big(x\Big(\frac{1}{2}-k\Big)\Big)\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}. \end{aligned}$$

Kuna f on lõigus $[-\pi, \pi]$ pidev (seega $f(x-) = f(x+) = f(x)$) ning

$$f'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\cos\frac{x}{2}, \qquad x \neq 0,$$

siis (teoreemi 1.11 põhjal) funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks $S = \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$. Järelikult

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Kuna $\cos(-kx) = \cos(kx)$, siis

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{x}{2}\right| &= -\frac{2}{\pi}\Big(-1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1}\Big)\\ &= -\frac{2}{\pi}\Big(-1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1}-\frac{\cos 0}{-1}\Big) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{4k^2-1}.\end{aligned}$$

□

Järgmine lemma põhineb peatükil 3.2 Montgomery raamatus [7].

Lemma 3.2. *Olgu* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. *Siis*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n) = \frac{e(\alpha n)-1}{e(\alpha)-1},$$

kusjuures

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n)\Big| \leqslant \min(N, \frac{1}{2\|\alpha\|}).$$

Tõestus. Paneme tähele, et $\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n)$ on N liikmest koosnev lõplik geomeetriline jada, kus $q = e(\alpha)$. Leiame jada summa, kasutades valemit $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, saame, et

$$\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n) = \frac{1\cdot(1-e(\alpha n))}{1-e(\alpha)} = \frac{e(\alpha n)-1}{e(\alpha)-1}.$$

Seega

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n)\Big| &= \Big|\frac{e(\alpha n)-1}{e(\alpha)-1}\Big| = \Big|\frac{e(N\frac{\alpha}{2})(e(N\frac{\alpha}{2})-e(-N\frac{\alpha}{2}))}{e(\frac{\alpha}{2})(e(\frac{\alpha}{2})-e(-\frac{\alpha}{2}))}\Big|\\ &= \Big|e\Big((N-1)\frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\sin(n\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\Big| = \Big|\frac{\sin(N\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|}.\end{aligned}$$

Kuna $|\sin(\pi\alpha)|$ graafik on igas intervallis $n < \alpha < n+1, n \in \mathbb{Z}$ kumer ja $2\|\alpha\|$ on $|\sin(\pi\alpha)|$ lõikaja, siis $|\sin(\pi\alpha)| \geqslant 2\|\alpha\|$. Kuna $|e(\alpha n)| \leqslant 1$, siis on N kolmnurga võrratuse tõttu antud summa mooduli triviaalne tõke. Seega

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} e(\alpha n)\Big| \leqslant \min\Big(N, \frac{1}{2\|\alpha\|}\Big).$$

□

Lemma 3.3. *Olgu $p,q,r\in\mathbb{Z}$, $\text{SÜT}(p,q)=1$, $3\leqslant q\leqslant r$, $1\leqslant h\leqslant 2q$, $2\nmid h$. Siis*

$$\sum_{\substack{q<4k\leqslant r\\ 2pk\equiv h \pmod q}} \frac{1}{4k^2-1}\leqslant \frac{10}{q^2}.$$

Tõestus. Hindame summat $\displaystyle\sum_{\substack{q<4k\leqslant r\\ 2pk\equiv h \pmod q}} \frac{1}{4k^2-1}$. Olgu k selline, et $q<4k\leqslant r$ ja $2pk\equiv h \pmod q$. Olgu $t\in\mathbb{Z}$ vähim täisarv, mille korral $2p(k+t)\equiv h \pmod q$, siis $2pt\equiv 0 \pmod q$. Kuna $\text{SÜT}(p,q)=1$ ja q on paaritu, siis

$$t\equiv 0 \pmod q \quad\Rightarrow\quad q\mid t,$$

seega t on q kordne ehk $t=q$, mis tähendab, et k esineb summas iga q tagant. Olgu k_0 summas esimene selline k, mille korral kehtivad $q<4k_0\leqslant r$ ja $2pk_0\equiv h \pmod q$. Kirjutame $2k=(ql+2k_0)$, $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ning hindame summat

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(ql+2k_0)^2-1} &= \frac{1}{(2k_0)^2-1}+\frac{1}{(q+2k_0)^2-1}+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{(ql+2k_0)^2-1}\\
&\leqslant \frac{1}{(2k_0)^2-1}+\frac{1}{(q+2k_0)^2-1}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{(qx+2k_0)^2-1}\\
&= \frac{1}{(2k_0)^2-1}+\frac{1}{(q+2k_0-1)(q+2k_0+1)}+\frac{1}{q(q+2k_0-1)}\\
&\leqslant \frac{8}{q^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^2}\leqslant\frac{10}{q^2},
\end{aligned}$$

sest

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{dx}{(qx+2k_0)^2-1} &= \lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\Big(\frac{dx}{2(qx+2k_0-1)}-\frac{dx}{2(qx+2k_0+1)}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{q}\ln(qx+2k_0-1)-\frac{1}{q}\ln(qx+2k_0+1)\Big|_1^n\Big)\\
&= \frac{1}{2q}\lim_{n\to\infty}(\ln(qn+2k_0-1)-\ln(q+2k_0-1)\\
&\quad -\ln(qn+2k_0+1)+\ln(q+2k_0+1))\\
&= \frac{1}{2q}\Big(\lim_{n\to\infty}\ln\Big(\frac{qn+2k_0-1}{qn+2k_0+1}\Big)+\ln\Big(\frac{q+2k_0+1}{q+2k_0-1}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2q}\ln\Big(\frac{q+2k_0+1}{q+2k_0-1}\Big)\leqslant\frac{1}{2q}\Big(\frac{q+2k_0+1}{q+2k_0-1}-1\Big)=\frac{1}{q(q+2k_0-1)}
\end{aligned}$$

ja pannes tähele, et $2k_0>\frac{q}{2}\geqslant\frac{3}{2}>1$, siis

$$\frac{1}{q+2k_0-1}<\frac{1}{q}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{q+2k_0+1}<\frac{1}{q}\quad\text{ning}\quad\frac{1}{(2k_0)^2-1}\leqslant\frac{8}{q^2}. \qquad\square$$

Lemma 3.4. *Olgu $p \in \mathbb{Z}$, $q,k \in \mathbb{N}$, q paaris ja* $\text{SÜT}(p,q) = 1$. *Kui $2q \nmid 2k - q$, siis $2q \nmid 2pk + q$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $2q \mid 2pk+q$. Kuna $\text{SÜT}(p,q) = 1$, siis leiduvad $u, v \in \mathbb{Z}$ nii, et $up + vq = 1$, kus u on paaritu, seega

$$2q \nmid 2k(up+vq) - q = 2upk + 2vqk - q \Rightarrow 2q \nmid 2upk - q.$$

Kuna $2q \mid 2pk + q$, siis $2q \mid u(2pk+q) = 2upk + uq$. Järelikult

$$2q \nmid 2upk + uq - (2upk - q) = (u+1)q,$$

millega oleme saanud vastuolu, sest $u+1$ on paarisarv, seega $2q \mid (u+1)q$. Järelikult $2q \nmid 2pk + q$. □

Lemma 3.5. *Olgu $k, q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, q paaritu ja $1 \leqslant h \leqslant 2q$, h paaritu. Siis*

$$2pk + q \equiv h \pmod{2q} \quad \Leftrightarrow \quad 2pk \equiv h \pmod{q}.$$

Tõestus. „$\Rightarrow$“ Kui $2pk + q \equiv h \pmod{2q}$, siis definitsiooni põhjal leidub $t \in \mathbb{Z}$ nii, et $2pk + q = 2tq + h$. Siis aga leidub $l = 2t + 1 \in \mathbb{Z}$ nii, et $2pk = lq + h$ ehk $2pk \equiv h \pmod{q}$.
„$\Leftarrow$“ Kui $2pk \equiv h \pmod{q}$, siis definitsiooni põhjal leidub $t \in \mathbb{Z}$ nii, et $2pk = tq + h$, kusjuures t on paaritu, sest h on paaritu. Siis aga leidub $l = \dfrac{t+1}{2} \in \mathbb{Z}$ nii, et $2pk + q = 2lq + h$ ehk $2pk + q \equiv h \pmod{2q}$. □

3.1 Põhiteoreem ja tema tõestus

Teoreem 3.6. *Olgu $f \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja olgu $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ arvu α ahelmurru lähismurdude nimetajate jada. Kui rida*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n^2} \int_1^{q_n+1} f(x)dx \tag{3.1}$$

koondub, siis ka rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) |\sin(n\pi\alpha)|$ *koondub.*

Tõestus. Näitame, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) |\sin(n\pi\alpha)|$ koondub. Selleks näitame, et tema osasummade jada $S(\alpha; M, N)$ on Cauchy jada, s.t.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \colon M > N \geqslant N_0 \Rightarrow |S(\alpha; M, N)| < \varepsilon.$$

Fikseerime suvalise $\varepsilon > 0$. Kasutades rea $\sum\limits_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n^2}\int_1^{q_{n+1}} f(x)dx$ koonduvust, leiame sellise indeksi $j_0 = j_0(\varepsilon)$, et

$$\sum_{\substack{j=j_0\\2|q_j}}^{\infty} \frac{1}{q_j^2}\int_1^{q_{j+1}} f(x)dx < \frac{\pi}{320}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

Hindame taas summat

$$S(\alpha;M,N) = \sum_{n=N+1}^{N+M} (-1)^n f(n)|\sin(n\pi\alpha)|.$$

Võime lihtsuse mõttes eeldada, et N on paaris, sest kui oleme hinnanud summat mingi $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ abil paaris N korral, siis paaritu N jaoks kehtib

$$S(\alpha;M,N) = S(\alpha;M,N+1) + 2f(N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2f(N) \longrightarrow 0,$$

sest eelduse kohaselt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Arendame funktsiooni $|\sin(n\pi\alpha)|$ Fourier' ritta, saame lemma 3.1 põhjal

$$|\sin(n\pi\alpha)| = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\alpha kn)}{4k^2-1} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e(\alpha kn)}{4k^2-1} \quad \forall x\in[-\pi,\pi],$$

sest $\sin(-2\pi\alpha kn) = -\sin(2\pi\alpha kn)$. Perioodilisuse tõttu kehtib eelnev iga $x\in\mathbb{R}$ korral. Asendades summasse, saame, et

$$S(\alpha;M,N) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-1}{4k^2-1}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)e(\alpha kn).$$

Kui $k=0$, siis Leibnizi vahelduvate märkidega rea jääkliikme hinnangut (vt. lemma 1.13) ja f monotoonsust kasutades, saame

$$\begin{aligned}\Big|\frac{2}{\pi}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)\Big| &= \frac{2}{\pi}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n f(n) - \sum_{n=N+M+1}^{\infty}(-1)^n f(n)\Big|\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\Big(\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n f(n)\Big| + \Big|\sum_{n=N+M+1}^{\infty}(-1)^n f(n)\Big|\Big)\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\big(f(N+1)+f(N+M+1)\big) \leqslant \frac{4}{\pi}f(N) =: \tau_1.\end{aligned}$$

Kombineerides rea liikmeid, kui $k = \pm m$, saame iga $m \geqslant 1$ korral, et

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\Big(\frac{-1}{4m^2-1}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)(\cos(2\pi\alpha mn) + i\sin(2\pi\alpha mn))\\
&\quad + \frac{-1}{4m^2-1}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)(\cos(2\pi\alpha mn) - i\sin(2\pi\alpha mn))\Big)\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{-1}{4m^2-1}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n) 2\cos(2\pi\alpha mn)\Big) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big\{\frac{-1}{4m^2-1}\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)e(\alpha mn)\Big\}
\end{aligned}
$$

ning jõuame võrratuseni

$$
S(\alpha; M, N) \leqslant \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{4k^2-1} - \sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)e(\alpha kn)\Big\} + \tau_1. \tag{3.2}
$$

Hindame rea liikmeid, mille korral $k > M$. Kolmnurga võrratuse ja f monotoonsuse põhjal

$$
\Big|\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)e(\alpha kn)\Big| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+M} f(n)|e(\alpha kn)| \leqslant Mf(N),
$$

seega

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\Big|\sum_{n=N+1}^{N+M}(-1)^n f(n)e(\alpha kn)\Big| \leqslant \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{Mf(N)}{4k^2-1}\\
&= \frac{Mf(N)}{2}\sum_{k=M+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)\\
&= \frac{Mf(N)}{2}\Big(\frac{1}{2M+1} - \frac{1}{2M+3} + \frac{1}{2M+3} - \frac{1}{2M+5} + \dots\Big) = \frac{Mf(N)}{4M+2} \leqslant \frac{f(N)}{4}.
\end{aligned}
$$

Tähistame $\tau_2 := \tau_1 + \dfrac{f(N)}{4}$. Kuna N on paaris ning $e(\alpha k(N+t)) = e(\alpha kN)e(\alpha kt)$ iga $1 \leqslant t \leqslant M$ korral, siis võrratusest (3.2) saame

$$
S(\alpha; M, N) \leqslant \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{k=1}^{M}\frac{-e(\alpha kN)}{4k^2-1}\sum_{n=1}^{M}(-1)^n g(n)e(\alpha kn)\Big\} + \tau_2, \tag{3.3}
$$

kus $g(x) = f(N+x)$.
Kasutame Abeli teisendust, võttes lemmas 1.14 $n := M$, $k := n$, $u_n := (-1)^n e(\alpha kn)$ ja $v_n := g(n)$, saame

$$
\sum_{n=1}^{M}(-1)^n g(n)e(\alpha kn) = g(M)U(\alpha k; M) - \sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)U(\alpha k; m), \tag{3.4}
$$

kus $\Delta g(m) = g(m+1) - g(m)$ ja

$$\begin{aligned} U(\alpha k; n) &= \sum_{n=1}^{m} (-1)^n e(\alpha k n) = \sum_{n=1}^{m} (\cos(n\pi) + i\sin(n\pi)) e(\alpha k n) \\ &= \sum_{n=1}^{m} e\Big(\frac{n}{2}\Big) e(\alpha k n) = \sum_{n=1}^{m} e\Big(\Big(\alpha k + \frac{1}{2}\Big) n\Big). \end{aligned}$$

Asendame (3.4) võrdusesse (3.3), saame

$$S(\alpha; M, N) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{Re}\Big\{ g(M) V(\alpha; M) \sum_{m=1}^{M-1} \Delta g(m) V(\alpha; m) \Big\} + \tau_2, \tag{3.5}$$

kus

$$V(\alpha; m) = \sum_{k=1}^{M} \frac{-e(\alpha k N)}{4k^2 - 1} U(k\alpha; m).$$

Et hinnata võrratuse (3.5) paremat poolt, lõhume summa $V(\alpha; m)$ tükkideks vastavalt lähismurdude nimetajatele α ahelmurru esituses. Olgu $(p_n/q_n)_{n=0}^{\infty}$ arvu α ahelmurru lähismurdude jada. Jagame $V(\alpha; m)$ osadeks $V_j(\alpha; m)$, mis on defineeritud võrdusega

$$V_j(\alpha; m) = \sum_{k \in \mathcal{K}_j(M)} \frac{-e(\alpha k N)}{4k^2 - 1} U(k\alpha; m), \tag{3.6}$$

kus $\mathcal{K}_j(M)$ on hulk, mis koosneb positiivsetest täisarvudest $k \leqslant M$, mille korral $q_j < 4k \leqslant q_{j+1}$. Leiame kolm erinevat hinnangut summa $V_j(\alpha; m)$ jaoks, sõltuvalt q_j suurusest ning paarsusest.

3.1.1 $V_j(\alpha; m)$ hinnang väikese j korral

Kui j on mingi konstandiga ülevalt tõkestatud, siis saame lemma 3.2 abil hinnangu

$$\begin{aligned} |V_j(\alpha; x)| &\leqslant \sum_{q_j < 4k \leqslant q_{j+1}} \frac{1}{4k^2 - 1} \min\Big(m, \frac{1}{2 \langle\!\langle k\alpha + \frac{1}{2} \rangle\!\rangle}\Big) \\ &\leqslant \sum_{q_j < 4k \leqslant q_{j+1}} \frac{1}{(8k^2 - 2)\langle\!\langle k\alpha + \frac{1}{2} \rangle\!\rangle} =: K_j(\alpha). \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.2 $V_j(\alpha; m)$ hinnang paaritu q_j korral

Olgu q_j paaritu ja piisavalt suur, s.t. kehtigu $q_j \geqslant 2 > \sqrt{e}$. Olgu $\beta := \alpha - \dfrac{p_j}{q_j}$. Kui $q_j < 4k \leqslant q_{j+1}$, siis saame lemma 1.7 põhjal

$$0 < \frac{1}{8q_{j+1}} = \frac{q_j}{8q_j q_{j+1}} < \frac{k}{2q_j q_{j+1}} < k|\beta| < \frac{k}{q_j q_{j+1}} \leqslant \frac{q_{j+1}}{4q_j q_{j+1}} = \frac{1}{4q_j} < \frac{1}{2}.$$

Seega $\|k\beta\| = k|\beta|$.
Kuna q_j on paaritu, siis $2q_j \nmid (2p_jk + q_j)$ ja

$$\delta_{p_j,q_j}(k) := \left\| k\frac{p_j}{q_j} + \frac{1}{2} \right\| = \left\| \frac{2p_jk + q_j}{2q_j} \right\| \geqslant \frac{1}{2q_j}.$$

Kolmnurga võrratuse (vt. lemma 1.2) tõttu

$$\delta_{p_j,q_j}(k) = \left\| k\frac{p_j}{q_j} + \frac{1}{2} + k\beta - k\beta \right\| \leqslant \left\| k\frac{p_j}{q_j} + k\beta + \frac{1}{2} \right\| + \|k\beta\| = \left\| k\alpha + \frac{1}{2} \right\| + \|k\beta\|,$$

seega

$$\left\| k\alpha + \frac{1}{2} \right\| \geqslant \delta_{p_j,q_j}(k) - k|\beta| \geqslant \delta_{p_j,q_j}(k) - \frac{1}{4q_j} \geqslant \frac{\delta_{p_j,q_j}(k)}{2}.$$

Kasutades jälle lemmat 3.2 $U(k\alpha; m)$ hindamiseks, saame, et

$$\begin{aligned}
|V_j(\alpha; m)| &\leqslant \sum_{q_j < 4k \leqslant q_{j+1}} \frac{1}{2(4k^2 - 1)\left\| k\alpha + \frac{1}{2} \right\|} \leqslant \sum_{q_j < 4k \leqslant q_{j+1}} \frac{\delta_{p_j,q_j}(k)^{-1}}{4k^2 - 1} \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant 2q_j \\ 2 \nmid h}} \sum_{\substack{q_j < 4k \leqslant q_{j+1} \\ 2p_jk + q_j \equiv h \pmod{2q_j}}} \frac{\delta_{p_j,q_j}(k)^{-1}}{4k^2 - 1} \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant 2q_j \\ 2 \nmid h}} \left\| \frac{h}{2q_j} \right\|^{-1} \sum_{\substack{q_j < 4k \leqslant q_{j+1} \\ 2p_jk \equiv h \pmod{q_j}}} \frac{1}{4k^2 - 1},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

kus viimane võrdus kehtib tänu lemmale 3.5.
Hindame summat üle k võrduse (3.8) paremas pooles, kasutades lemmat 3.3 ja saame, et

$$\sum_{\substack{q_j < 4k \leqslant q_{j+1} \\ 2p_jk \equiv h \pmod{q_j}}} \frac{1}{4k^2 - 1} \leqslant \frac{10}{q_j^2}.$$

Kuna

$$1 \leqslant h \leqslant \frac{q_j + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{2h - 1}{2q_j} \right\| = \frac{2h - 1}{2q_j} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{2h - 1}{2q_j} \right\|^{-1} = \frac{2q_j}{2h - 1},$$

$$\frac{q_j + 1}{2} \leqslant h \leqslant q_j \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{2h - 1}{2q_j} \right\| = 1 - \frac{2h - 1}{2q_j} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{2h - 1}{2q_j} \right\|^{-1} = \frac{2q_j}{2q_j - (2h - 1)},$$

ning

$$\sum_{h=1}^{(q_j+1)/2} \frac{2q_j}{2h - 1} = \sum_{h=(q_j+1)/2}^{q_j} \frac{2q_j}{2q_j - (2h - 1)},$$

siis kasutades eeldust $q_j > \sqrt{e}$, millest $1 \leqslant 2\ln q_j$, saame võrdusest (3.8):

$$\begin{aligned}|V_j(\alpha;m)| &\leqslant \frac{10}{q_j^2}\sum_{h=1}^{q_j}\left\langle\!\left\langle \frac{2h-1}{2q_j}\right\rangle\!\right\rangle^{-1} \leqslant \frac{10}{q_j^2}\cdot 2\sum_{h=1}^{(q_j+1)/2}\frac{2q_j}{2h-1} \\ &= \frac{40}{q_j}\sum_{h=1}^{(q_j+1)/2}\frac{1}{2h-1} \leqslant \frac{40}{q_j}\Big(1+\int_1^{(q_j+1)/2}\frac{dx}{2x-1}\Big) \\ &= \frac{40}{q_j}\Big(1+\frac{1}{2}\ln q_j\Big) \leqslant \frac{100\ln q_j}{q_j}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.1.3 $V_j(\alpha;m)$ hinnang paaris q_j korral

Olgu q_j paaris ja β nagu osas 3.1.2. Kui $2k \not\equiv q_j \pmod{2q_j}$, siis lemma 3.4 põhjal $2q_j \nmid (2p_jk+q_j)$ ja

$$\delta_{p_j,q_j}(k) = \left\langle\!\left\langle \frac{2p_jk+q_j}{2q_j}\right\rangle\!\right\rangle \geqslant \frac{1}{2q_j}.$$

Järelikult on paaris q_j korral võimalik arutleda sarnaselt osaga 3.1.2, välja arvatud juhul, kui $2k \equiv q_j \pmod{2q_j}$. Seega

$$|V_j(\alpha;m)| \leqslant |V_j'(\alpha;m)| + \frac{100\ln q_j}{q_j}, \tag{3.10}$$

kus

$$V_j'(\alpha;m) = \sum_{\substack{q_j<4k\leqslant q_{j+1} \\ 2k\equiv q_j \pmod{2q_j}}} \frac{-e(\alpha kN)}{4k^2-1}U(k\alpha;m). \tag{3.11}$$

Kui $2k \equiv q_j \pmod{2q_j}$, siis võime kirjutada $2k = (2t+1)q_j$, $t \in \mathbb{Z}$ ja

$$\begin{aligned}U(k\alpha;m) &= \sum_{n=1}^{m} e((k\alpha+\frac{1}{2})n) = \sum_{n=1}^{m} e\Big(k(\beta+\frac{p_j}{q_j})n+\frac{n}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{m} e(\beta kn)e\Big(nk\frac{p_j}{q_j}\Big)e\Big(\frac{n}{2}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{m} e(\beta kn)(-1)^n\Big(\cos\Big(2\pi nk\frac{p_j}{q_j}\Big)+i\sin\Big(2\pi nk\frac{p_j}{q_j}\Big)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{m} e(\beta kn)(-1)^n(\cos(\pi np_j(2t+1))+i\sin(\pi np_j(2t+1))) \\ &= \sum_{n=1}^{m} e(\beta kn)(-1)^n(-1)^{np_j(2t+1)} = \sum_{n=1}^{m} e(\beta kn),\end{aligned}$$

sest $p_j(2t+1)$ on paaritu. Kasutades lemmat 3.2, saame, et

$$|U(k\alpha;m)| \leqslant \min\Big(m, \frac{1}{2\langle\!\langle\beta k\rangle\!\rangle}\Big) = \min\Big(m, \frac{1}{2k|\beta|}\Big) \leqslant \min(m, 4q_{j+1}) \leqslant 4\min(m, q_{j+1}),$$

sest $\dfrac{1}{2k} < \dfrac{2}{q_j}$ ja lemma 1.7 põhjal $\dfrac{1}{|\beta|} < 2q_jq_{j+1}$.
Analoogiliselt lemmaga 3.3 on summa jaoks üle k võimalik tuletada hinnang

$$\sum_{\substack{q_j<4k\leqslant q_{j+1}\\ 2k\equiv q_j \pmod{2q_j}}} \frac{1}{4k^2-1} \leqslant \frac{10}{q_j^2},$$

seega

$$|V_j'(\alpha;m)| \leqslant \sum_{\substack{q_j<4k\leqslant q_{j+1}\\ 2k\equiv q_j \pmod{2q_j}}} \frac{4\min(m,q_{j+1})}{4k^2-1} \leqslant \frac{40\min(m,q_{j+1})}{q_j^2}. \tag{3.12}$$

Kokkuvõttes

$$|V_j(\alpha;m)| \leqslant \frac{40\min(m,q_{j+1})}{q_j^2} + \frac{100\ln q_j}{q_j}. \tag{3.13}$$

Juhul, kui $2q_j > q_{j+1}$, siis peaksid korraga kehtima

$$\frac{q_j}{2} < 2k < q_j, \qquad 2k \equiv q_j \pmod{2q_j},$$

mis on võimatu, seega summas $V_j'(\alpha;m)$ pole ühtegi liidetavat, ja viimase võrratuse paremal pool esimene liige on üleliigne.

3.1.4 Tõestuse lõpuosa

Olgu

$$K := \sum_{j=0}^{j_0-1} K_j(\alpha) = \sum_{4k\leqslant q_{j_0}} \frac{\left\langle\!\left\langle k\alpha + \frac{1}{2}\right\rangle\!\right\rangle^{-1}}{8k^2-2}$$

(j_0 määrati leheküljel 19). Kasutame valemit (3.7), et hinnata $V(\alpha;m)$ alamsummasid $V_j(\alpha;m)$, kui $j < j_0$ ning valemeid (3.9) ja (3.13), et hinnata summasid $V_j(\alpha;m)$, kui $j \geqslant j_0$ ja q_j on vastavalt paaritu või paaris. Olgu $\mathcal{I}_\alpha(M)$ selliste $j \geqslant j_0$ hulk, mille korral q_j on paaris ning rahuldab võrratusi $q_j \leqslant M$ ja $2q_j \leqslant q_{j+1}$. Siis

$$|V(\alpha;m)| = \Big|\sum_j V_j(\alpha;m)\Big| \leqslant K + 100\sum_{j\geqslant j_0}\frac{\ln q_j}{q_j} + \sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\min(m,q_{j+1}).$$

Näitame, et $\ln x < \sqrt{x}$ iga $x > 0$ korral. Olgu $f_1\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ selline, et $f_1(x) := \sqrt{x}-\ln x$. Kuna

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x},$$

siis f_1 on kahanev, kui $0 < x \leqslant 4$ ja kasvav, kui $x \geqslant 4$. Paneme tähele, et ekstreemumkohas $f_1(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2\ln\frac{e}{2} > 0$, järelikult

$$f_1(x) = \sqrt{x} - \ln x > 0 \quad \forall x > 0,$$

nagu soovitud. Kuna $q_j \geqslant 2^{\frac{j}{2}-1}$, kui $j \geqslant 1$, ja $\ln q_j < \sqrt{q_j}$ siis

$$\sum_{j \geqslant j_0} \frac{\ln q_j}{q_j} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q_j}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{j}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}-1}.$$

Tähistame $c_1 := \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}-1}$, siis

$$|V(\alpha; m)| \leqslant K + c_1 + 2 \sum_{j \in \mathcal{I}_\alpha(M)} \frac{40}{q_j^2} \min(m, r_j), \tag{3.14}$$

kus $r_j = \left\lceil \dfrac{q_{j+1}}{2} \right\rceil$. Hindame summat

$$S(\alpha; M, N) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{Re}\Big\{ g(M) V(\alpha; M) - \sum_{m=1}^{M-1} \Delta g(m) V(\alpha; m) \Big\} + \tau_2.$$

Paneme tähele, et f monotoonsuse tõttu

$$|Kg(M)| = Kf(N+M) \leqslant Kf(N), \quad |c_1 g(M)| = c_1 f(N+M) \leqslant c_1 f(N),$$

$$|K\Delta g(m)| = K(f(N+m) - f(N+m+1)) \leqslant Kf(N),$$
$$|c_1 \Delta g(m)| = c_1(f(N+m) - f(N+m+1)) \leqslant c_1 f(N),$$

ja

$$|\Delta g(m)| = |g(m+1) - g(m)| = g(m) - g(m+1) = -\Delta g(m),$$

seega

$$
\begin{aligned}
|S(\alpha;M,N)| &\leqslant \frac{4}{\pi}\Big|g(M)V(\alpha;M)+\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)V(\alpha;m)\Big|+\tau_2\\
&\leqslant \frac{4}{\pi}\Big(g(M)|V(\alpha;M)|-\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)|V(\alpha;m)|\Big)+\tau_2\\
&\leqslant \frac{4}{\pi}\Big(g(M)\Big(K+c_1+2\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\min(M,r_j)\Big)\\
&\quad -\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)\Big(K+c_1+2\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\min(m,r_j)\Big)\Big)+\tau_2\\
&\leqslant \frac{8}{\pi}\Big(g(M)\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\min(M,r_j)-\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\min(m,r_j)\Big)+\tau_2\\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{40}{q_j^2}\Big(g(M)\min(M,r_j)-\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)\min(m,r_j)\Big)+\tau_2.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Kasutades f monotoonsust ja Abeli teisendust (vt. lemma 1.14), kus $n := M$, $k := m$, $v_m := g(m)$, $s_m := \min(m,r_j)$ ja $u_m = s_m - s_{m-1} = \min(m,r_j)-\min(m-1,r_j)$, saame

$$
\begin{aligned}
&g(M)\min(M,r_j)-\sum_{m=1}^{M-1}\Delta g(m)\min(m,r_j)\\
&= g(M)\min(M,r_j)+\sum_{m=1}^{M-1}(g(m)-g(m+1))\min(m,r_j)\\
&= \sum_{m=1}^{M} g(m)(\min(m,r_j)-\min(m-1,r_j)) \leqslant \sum_{m=1}^{r_j} g(m)\\
&\leqslant \int_0^{r_j} g(x)dx = \int_1^{r_j+1} f(x+N-1)dx \leqslant \int_1^{q_{j+1}} f(x)dx,
\end{aligned}
$$

sest $\min(m,r_j)-\min(m-1,r_j)\leqslant 1$. Järelikult

$$
|S(\alpha;M,N)| \leqslant \frac{320}{\pi}\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{1}{q_j^2}\int_1^{q_{j+1}} f(x)dx+\tau_2. \tag{3.16}
$$

Kuna

$$
\sum_{j\in\mathcal{I}_\alpha(M)}\frac{1}{q_j^2}\int_1^{q_{j+1}} f(x)dx \leqslant \sum_{\substack{j=j_0\\ 2|q_j}}^{\infty}\frac{1}{q_j^2}\int_1^{q_{j+1}} f(x)dx < \frac{\pi}{320}\frac{\varepsilon}{2},
$$

siis saame kogu summa hinnanguks

$$
|S(\alpha;M,N)| < \frac{\varepsilon}{2}+\tau_2,
$$

kus

$$\tau_2 = \left(\frac{4}{\pi} + \frac{1}{4}\right) f(N).$$

Paneme tähele, et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (sest $f \in \mathfrak{F}$), seega

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N_0 > 0\colon \quad N > N_0 \Rightarrow |f(N)| < \varepsilon'.$$

Võtame $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{2\left(\frac{4}{\pi} + \frac{1}{4}\right)}$ Siis $M > N > N_0$ korral

$$|S(\alpha; M, N)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sellega oleme näidanud, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) |\sin(n\pi\alpha)|$ koondub. □

4. Järeldused

Selles peatükis järeldame teoreemist 3.6 rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\sin n|}{n}$ koonduvuse. Tõestuses kasutame lähismurdude omadusi (vt lemma 1.7) ja Mahleri poolt leitud hinnangut π irratsionaalsusmõõdule.

Märkus 4.1. Seni parim ülemine tõke arvu π irratsionaalsusmõõdule on 7,6063..., mille on andnud Salikhov aastal 2008 [8]. Kuna arv π on transtsendentne, on tema irratsionaalsusmõõt kindlasti suurem kui 2 või võrdne sellega (vt. irratsionaalsusmõõdu definitsioonile järgnev märkus 1.9), kuid vähimat ülemist tõket ei ole seni suudetud leida.

Järeldus 4.2. Rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\sin n|}{n}$ koondub.

Tõestus. Rakendame teoreemi 3.6 juhule, kus $\alpha = \frac{1}{\pi}$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$. Vaja on näidata, et rida

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n^2} \int_1^{q_{n+1}} \frac{1}{x} dx$$

koondub. Mahler on tõestanud aastal 1953 (vt. [6]), et suvaliste täisarvude p, q, kus $q \geqslant 2$, korral kehtib

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{q^{42}}.$$

Olgu $(p_n/q_n)_{n=0}^{\infty}$ arvu $\frac{1}{\pi}$ lähismurdude jada. Arendame $\frac{1}{\pi}$ ahelmurruks, saame

$$a_0 = \left[\frac{1}{\pi} \right] = 0, \quad r_1 = \frac{1}{\frac{1}{\pi} - 0} = \pi, \quad a_1 = [r_1] = 3, \quad r_2 = \frac{1}{\pi - 3}, \quad a_2 = [r_2] = 7, \quad \ldots$$

seega lähismurrud avalduvad definitsiooni 1.6 kohaselt kujul

$$\frac{p_n}{q_n} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\cdots} + \frac{1}{a_{n-1}}}}$$

ehk

$$\frac{p_0}{q_0}=0,\quad \frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{7}{22},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{106}{333},\quad \dots$$

Paneme tähele, et

$$\frac{\left|\frac{1}{\pi}-\frac{p_n}{q_n}\right|}{\left|\pi-\frac{q_n}{p_n}\right|}=\left|\frac{(q_n-\pi p_n)p_n}{\pi q_n(\pi p_n-q_n)}\right|=\left|\frac{p_n}{\pi q_n}\right|=\frac{p_n}{\pi q_n}.$$

Kuna lähismurdude korral kehtib omadus

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\dots<\frac{1}{\pi}<\dots<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_1}{q_1},$$

siis $n\geqslant 1$ korral

$$\frac{p_n}{\pi q_n}\geqslant\frac{p_2}{\pi q_2}=\frac{7}{22\pi}.$$

Tänu eelnevalt mainitud π omadusele, teadmisele, et $p_n\leqslant q_n$ ja lemmale 1.7

$$\frac{1}{q_nq_{n+1}}>\left|\frac{1}{\pi}-\frac{p_n}{q_n}\right|>\frac{7}{22\pi}\left|\pi-\frac{q_n}{p_n}\right|\geqslant\frac{7}{22\pi p_n^{42}}\geqslant\frac{7}{22\pi q_n^{42}},$$

mistõttu $q_{n+1}\leqslant\dfrac{22\pi}{7}q_n^{41}$. Siis

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{1}{q_n^2}\int_1^{q_{n+1}}\frac{1}{x}dx&=\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{1}{q_n^2}\ln|x|\Big|_1^{q_{n+1}}=\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{\ln q_{n+1}}{q_n^2}\leqslant\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{\ln\left(\frac{22\pi}{7}q_n^{41}\right)}{q_n^2}\\&=\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{\ln\frac{22\pi}{7}+41\ln q_n}{q_n^2}<\ln\frac{22\pi}{7}\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{1}{q_n^2}+41\sum_{\substack{n=1\\2|q_n}}^{\infty}\frac{1}{q_n},\end{aligned}$$

sest $\ln q_n\leqslant q_n-1<q_n$. Hindame antud ridade liikmeid, kasutades lähismurdude omadust (vt. lemma 1.7)

$$q_n\geqslant 2^{\frac{n}{2}-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{q_n}\leqslant 2^{1-\frac{n}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{q_n^2}\leqslant 2^{2-n}.$$

Rakendame d'Alembert'i tunnust ridadele $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{2-n}$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{1-\frac{n}{2}}$, saame

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2-(n+1)}}{2^{2-n}}\right|=\frac{1}{2}<1$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{1-\frac{n+1}{2}}}{2^{1-\frac{n}{2}}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

mis tähendab, et antud read koonduvad.
Ridade võrdluslause põhjal koonduvad ka read $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ 2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ ja $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ 2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n^2}$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ 2|q_n}}^{\infty} \frac{1}{q_n^2} \int_1^{q_{n+1}} \frac{1}{x} dx$ koondub, seega koondub ka rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\sin n|}{n}. \qquad \square$$

Kirjandus

[1] Max. A. Alekseyev *On convergence of the Flint Hills series.* arXiv:1104.5100 [math.CA] 27 Apr 2011.

[2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs* I. Valgus, Tallinn, 1982, teine, parandatud ja täiendatud trükk.

[3] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs* II. Valgus, Tallinn, 1968.

[4] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions.* Dover, New York, 1997.

[5] A. V. Kumchev, *On the convergence of some alternating series.* The Ramanujan Journal, Springer US **30** (2013), 101–116.

[6] K. Mahler, *On the approximation of* π, Indagationes Mathematicae **15** (1953), 30–42.

[7] H. L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis.* American Mathematical Society, Providence (1994), 39–40.

[8] V. Kh. Salikhov, *On the irrationality measure of* π. Russian Mathematical Surveys **63** (2008), 570–572, tõlgitud vene keelest.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Taisi Telve (sünnikuupäev 12.02.1994),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Liikmetega $(-1)^n \frac{|\sin n|}{n}$ rea koonduvus“, mille juhendaja on Indrek Zolk,
   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 12.05.2016